Aula 1
Classificação das Equações Diferenciais, Equações Lineares de Primeira Ordem e Fatores Integrantes.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Introdução

Muitos problemas importantes da engenharia, da física, da biologia e das ciências sociais são formulados por equações que envolvem a derivada de uma função desconhecida.

Uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida é chamada **equação diferencial**.

Em termos gerais, na disciplina MA311 – Cálculo III estudamos as principais técnicas para resolver e avaliar muitas classes de equações diferenciais.

Vamos iniciar o curso estudando como classificar as equações diferenciais.

Exemplo 1

Seja $P(t)$ a densidade (ou número de indivíduos) da população de uma certa espécie no instante de tempo t. Podemos assumir que a taxa de crescimento da população é proporcional a sua densidade. Em termos matemáticos,

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P. \tag{1}$$

Aqui, λ representa a taxa de crescimento (se $\lambda > 0$) ou decrescimento (se $\lambda < 0$).

A equação (1) é chamada **equação diferencial ordinária de primeira ordem** porque envolve apenas a primeira derivada de uma função P que depende de uma única variável t.

Exemplo 2

A Lei de Newton afirma que $F = ma$. Se $x(t)$ representa a posição de uma partícula no instante t, então podemos escrever

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{2}$$

em que a força resultante pode depender do tempo t, da posição x e da velocidade da partícula $\frac{dx}{dt}$.

No Exemplo (2) temos uma equação que envolve a segunda derivada de uma função x em t. Dessa forma, ela é chamada **equação diferencial ordinária de segunda ordem.**

Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais

Se a função desconhecida depende de uma única variável independente, temos uma **equação diferencial ordinária** (EDO).

As equações dos exemplos anteriores são ambas ordinárias!

Se derivadas parciais de uma função de duas ou mais variáveis aparecem na equação, tem-se uma **equação diferencial parcial** (EDP).

Exemplo 3

A equação da difusão ou da condução de calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

é um exemplo de equação diferencial parcial.

A Ordem de uma Equação Diferencial

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.

De forma mais geral, se y é uma função de t, então uma EDO de ordem n pode ser escrita como

$$F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{3}$$

em que F é uma função de t, y e suas derivadas y', y'',...,$y^{(n)}$.

Na prática, assumiremos que podemos resolver (3) na derivada $y^{(n)}$, isto é, vamos considerar

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right), \tag{4}$$

como protótipo de EDO de ordem n.

EDOs Lineares e Não-Lineares

Uma EDO é dita linear se a função F em (3) é linear com respeito as variáveis y, y', ..., $y^{(n-1)}$ e $y^{(n)}$.

Consequentemente, uma EDO pode ser escrita como:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = g(t), \tag{5}$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e g são funções somente de t.

Uma EDO que não é linear é dita não-linear. Em outras palavras, uma EDO não-linear não pode ser escrita como (5).

A EDO (1) é linear.

Exemplo 4

A EDO de segunda ordem

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0,$$

é linear ou não-linear?

Exemplo 4

A EDO de segunda ordem

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0,$$

é linear ou não-linear?

Resposta: A equação é linear porque pode ser escrita como

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = g(t),$$

com

$$\begin{aligned} a_0(t) &= t^2, \\ a_1(t) &= -3t, \\ a_2(t) &= 4, \\ g(t) &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 5

A EDO de terceira ordem

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = 0,$$

é linear ou não-linear?

Exemplo 5

A EDO de terceira ordem

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = 0,$$

é linear ou não-linear?

Resposta: A equação não é linear porque envolve o produto de y por y'.

Sistemas de EDOs

Um sistema de EDOs é composto várias equações envolvendo duas ou mais funções desconhecidas, todas dependentes da mesma variável t.

Exemplo 6 (Modelo Presa-Predador)

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ as densidades populacionais de duas espécies no instante t. Vamos assumir que as duas espécies interagem de forma presa-predador. Especificamente, x representa as presas e y os predadores. A dinâmica das duas espécies pode ser modelada através dos sistema não-linear:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy, \end{cases} \tag{6}$$

em que a, b, α e β são constantes positivas.

EDOs Lineares de Primeira Ordem

Iniciaremos nossos estudos sobre a resolução de equações diferenciais considerando EDOs lineares de primeira ordem.

De um modo geral, vamos admitir que uma EDO linear de primeira ordem pode ser escrita como

$$y' + p(t)y = q(t), \tag{7}$$

em que p e q são funções conhecidas e contínuas para todo $\alpha < t < \beta$.

Nosso objetivo é encontrar funções diferenciáveis que satisfazem (7) para todos os valores de t num certo intervalo.

Primeiramente, vamos resolver (7) quando ou $p(t) = 0$ ou $q(t) = 0$.

Se $p(t) = 0$, então temos

$$y' = q(t).$$

Pelo teorema fundamental do cálculo (que estabelece a relação entre derivada e integral), concluímos que a solução da EDO é

$$y(t) = \int q(t)dt + c, \tag{8}$$

em que c é a constante de integração.

Se $q(t) = 0$, então temos a EDO

$$y' + p(t)y = 0.$$

Note que $y(t) = 0$ é uma solução. Vamos procurar uma solução $y(t) \neq 0$.

Se $q(t) = 0$ e $y(t) \neq 0$, então a EDO pode ser escrita como

$$\frac{y'}{y} = -p(t).$$

Da regra da cadeia, temos que $\dfrac{d\ln|y|}{dt} = \dfrac{1}{y}y'$.
Portanto, pelo teorema fundamental do cálculo, temos

$$\frac{d\ln|y|}{dt} = -p(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|y| = -\int p(t)dt + c,$$

em que c é a constante de integração.

Concluindo, a solução da EDO $y' + p(t)y = 0$ é:

$$y(t) = C\exp\left\{-\int p(t)dt\right\}, \tag{9}$$

em que C é uma constante ($C = \pm e^c$ ou $C = 0$).

Fatores Integrantes

O método do fator integrante é usado para resolver (7) quando $p(t) \neq 0$ e $q(t) \neq 0$.

O conceito chave por trás da técnica do fator integrante é a regra do produto:

$$\frac{d(fg)}{dt} = f'g + fg'.$$

Com efeito, multiplicando ambos os lados de (7) por uma função μ, ainda indeterminada e chamada **fator integrante**, obtemos

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t). \tag{10}$$

Vamos agora escrever o termo do lado direito como sendo a derivada de um produto.

Considere $f = \mu$ e $g = y$. Pela regra do produto, temos

$$\frac{d(fg)}{dt} = \frac{d(\mu y)}{dt} = \mu' y + \mu y'.$$

Identificando $\mu' y + \mu y'$ com o termo do lado esquerdo de (10), obtemos

$$\mu'(t)y + \mu(t)y' = \mu(t)y' + \mu(t)p(t)y \iff \mu'(t) = \mu(t)p(t).$$

Admitindo que $u(t)$ é positiva para todo t, obtemos da da última equação

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t) \implies \ln(\mu(t)) = \int p(t)dt + k,$$

em que k é uma constante.

Sem perda de generalizada, consideraremos $k = 0$.

Concluindo, o fator integrante é dado pela equação

$$\mu(t) = \exp\left\{\int p(t)dt\right\}. \tag{11}$$

Retornando a equação diferencial, temos

$$\frac{d(\mu(t)y)}{dt} = \mu(t)q(t) \quad \Longrightarrow \quad \mu(t)y = \int \mu(t)q(t)dt + c.$$

Portanto, a solução da EDO

$$y' + p(t)y = q(t),$$

é

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)q(t)dt + c\right),$$

em que c é uma constante e

$$\mu(t) = \exp\left\{\int p(t)dt\right\},$$

é o chamado fator integrante.

É importante observar que toda solução de (7) satisfaz

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t) q(t) dt + c \right), \quad \text{com} \quad \mu(t) = \exp\left\{ \int p(t) dt \right\}. \tag{12}$$

Dizemos que a expressão em (12) é a **solução geral** da EDO.

Geometricamente, (12) define uma família de curvas, uma para cada valor da constante c.

Muitas vezes, escolhemos a curva que passa por um ponto (t_0, y_0). Equivalentemente, escrevemos

$$y(t_0) = y_0,$$

que é chamada **condição inicial**.

Um **problema de valor inicial** (PVI) é uma EDO com uma condição inicial.

Exemplo 7

Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{2}y = e^{-t}, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Exemplo 7

Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - \frac{1}{2}y = e^{-t}, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Resposta: A solução do PVI é

$$y = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}.$$

Exemplo 8

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y' + 2ty = t, \quad y(0) = 0.$$

Exemplo 8

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y' + 2ty = t, \quad y(0) = 0.$$

Resposta: A solução do PVI é

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t^2}.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje, vimos como classificar uma equação diferencial.

Embora o foco tenha sido as EDOs, conceitos como linearidade e sistemas são definidos de forma análoga EDPs.

Posteriormente, focamos nas EDOs lineares de primeira ordem e apresentamos o método do fator integrante para resolve-las.